Grado en Matemáticas

Análisis Funcional – Examen Parcial

1. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que la sucesión $\{\mathrm{e}_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder de ℓ_p. Deduce que c_{00} es denso en ℓ_p. Cuándo es normalmente convergente la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$?

2. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Claramente, T es un operador lineal. Prueba que es continuo y calcula su norma.

3. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M + N$ es cerrado.

4. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X \setminus M$. Prueba que la forma lineal $f : M + \mathbb{K}\,u \to \mathbb{K}$ dada por $f(m + \lambda u) = \lambda$ es continua si, y sólo si, $u \notin \overline{M}$, en cuyo caso, $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(u, M)$.

5. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas.

   a) Sea X un espacio vectorial con dos normas $\|.\|$ y $|||.|||$ no equivalentes. Si M es un subespacio vectorial de X con dimensión finita, entonces la aplicación identidad $I_M : (M, \|.\|) \to (M, |||.|||)$ es un isomorfismo topológico.

   b) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X sobre Y es continuo.

   c) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.

6. Responde a uno de los dos siguientes temas.

   a) Sistemas ortonormales.

   b) Teorema de Hahn-Banach (versión analítica).

Granada, 14 de noviembre de 2018